Chapitre 12 **Géométrie 5**

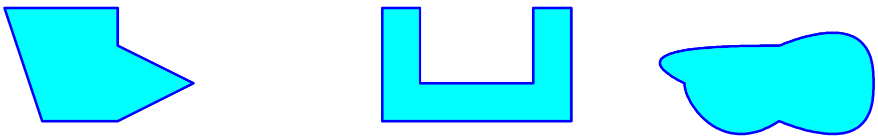
Périmètres et aires

I : Longueur, périmètre

La ***longueur d’un ligne polygonale*** est la somme des longueurs des segments qui la forment.

La ***surface d'une figure*** est la partie du plan ou de la feuille située à l'intérieur de la figure

Sur les figures ci-dessous, la ligne bleu foncée délimite chaque fois une surface



Le ***périmètre d'une figure ou d’une surface*** est la longueur de son pourtour.

➔ ***Dans les exemples précédents le périmètre des surfaces bleu-clair est la longueur de la ligne bleu foncée.***

II : Unités de longueur

1.) Définitions

Pour mesurer une longueur ou un périmètre, on utilise des instruments de mesure qui sont gradués. Ces graduations utilise des unités de longueur.

Il y a eu différentes unités de mesure qui se sont suivies tout au long de l’histoire. L’unité utilisée maintenant est le mètre.

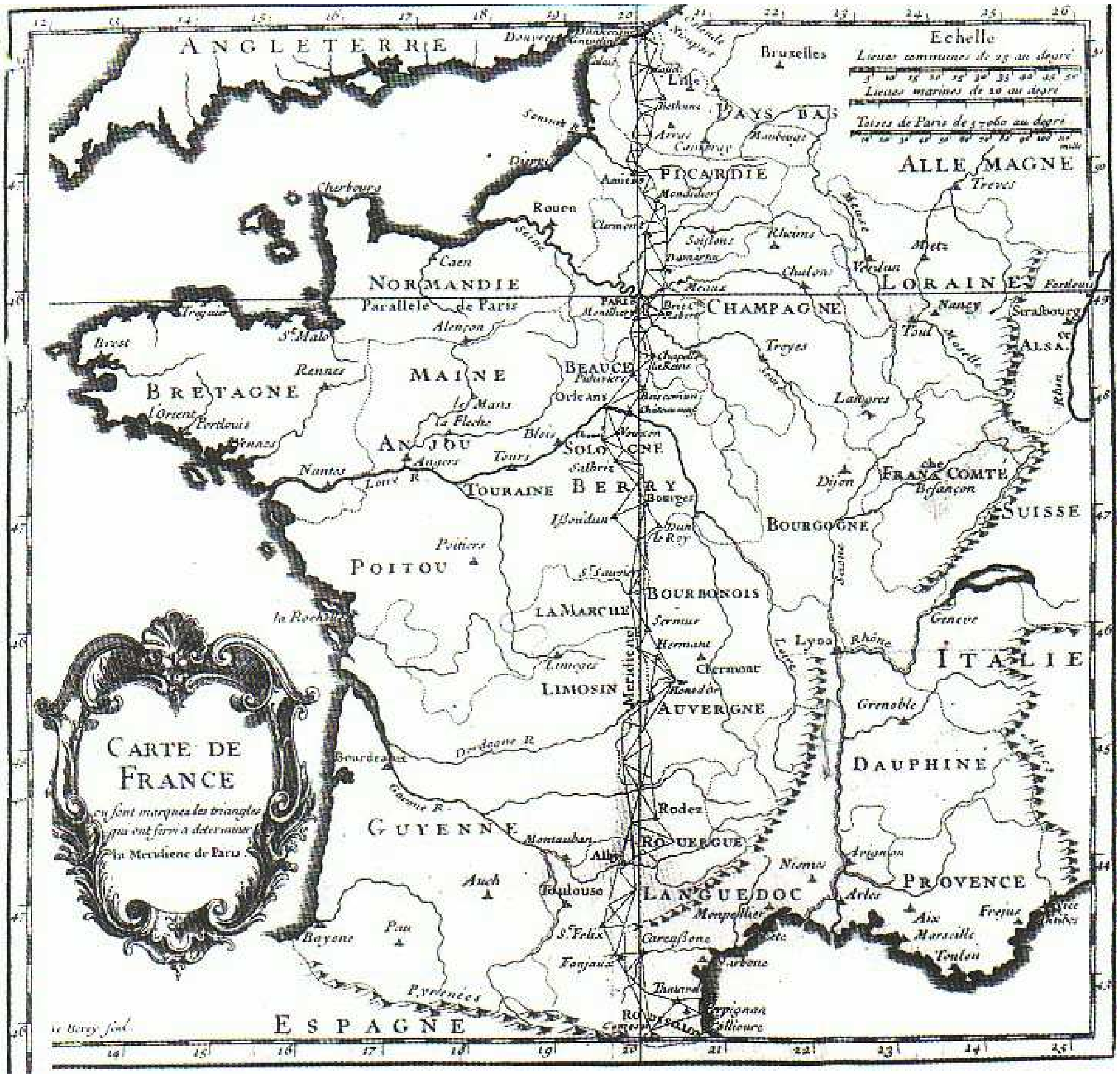
C’est en effet en 1790 que l’Assemblée Nationale française décide d’établir un système de mesure unique, ainsi que le système décimal, et qui soit adoptable par tous les pays du monde.

Le projet est confié à des savants de renom (*Borda*, *Condorcet*, *Lagrange*, *Laplace*, *Lavoisier* et *Monge*) qui proposent de définir le Mètre comme le **dix millionièmes du quart du méridien terrestre**, mesure qui ne dépend pas du pays.

Comment mesurer ce quart de méridien et avec quoi puisque nous ne possédons pas encore le Mètre !? La tâche est donnée à deux astronomes : *Jean-Baptiste Joseph Delambre* et *Pierre Méchain*.

***Delambre* et *Méchain* ne mesureront qu’un arc suffisamment long de ce quart de méridien. Par proportionnalité, ils pourront alors calculer la longueur de tout le quart de méridien de façon précise.**
Cet arc, appelé la Méridienne s’étend sur plus de 700km de Dunkerque à Barcelone. Mais il fallait compter avec les reliefs. La mesure ne peut se faire en ligne droite mais par triangulation. La méthode consiste à construire un enchevêtrement de triangles (115 au

total) recouvrant la Méridienne et ayant deux à deux un côté commun. Leurs sommets sont des points visibles les uns avec les autres (clochers, sommets de colline, …).
Il faut mesurer la longueur d'un côté du triangle reposant sur un terrain relativement horizontal. On établit par visées les mesures des angles du triangle afin d'obtenir par calculs trigonométriques la longueur de tous les côtés du triangle et par projection la distance réelle.



Le mètre était représenté par le mètre étalon, formé d'une règle en platine iridié peu déformable et déposé au pavillon de Breteuil, à Sèvres; il a maintenant depuis le 1er janvier 1961, une définition plus précise et beaucoup plus scientifique.

Précisons que la définition du mètre à partir de la mesure du méridien (1795) permet d'établir sa valeur à quelques dixièmes de millimètre près, soit de l'ordre de 10^{-4} et rappelons que l'incertitude relative associée à l'Etalon International (1889) est de 10^{-7}.

La 11ème Conférence générale des Poids et Mesures (octobre 1960) a donné notamment une nouvelle définition du mètre : " …longueur égale à 1 650 763,73 longueurs d'onde dans le vide de la radiation correspondante à la transition entre les niveaux 2 p_{10} et 5 d_5 de l'atome de krypton 86 ".
Le Comité international des Poids et Mesures indique une précision de 10^{-8} à propos de l'unité de longueur.

Le décret n° 61-501 du 3 mai 1961 est le texte fondamental relatif aux unités de mesure.

Le symbole est **m**.

Le mètre étant souvent, beaucoup trop grand, on a des sous unités, en le divisant par 10, 100, 1000, 1000000, ce qui donne **le décimètre, le centimètre, le millimètre, le micromètre.** Les symboles sont, respectivement, **dm, cm, mm, µm**.

Il est aussi, certaines fois, trop petit, donc on a des sur unités en le multipliant par 10, 100, 1000, ce qui donne **le décamètre, l'hectomètre, le kilomètre**. Les symboles sont, respectivement, **dam, hm, km**.

Il existe d'autres sous unités et sur unités moins utilisées.Changement d'unités

Il est évident qu'on a parfois besoin après un calcul de changer d'unité. Nous avons vu que ces sous-unités ou sur-unités sont obtenues en en divisant ou en multipliant par des multiples de dix comme pour le passage aux dixièmes, centièmes....ou aux dizaines, centaines....

On a donc, en faisant un tableau des changements très simples puisqu'il suffit d'écrire un chiffre par colonne.

km	hm	dam	m	dm	cm	mm			µm
		2	3	5	4				

Convertissons 23,54 m en cm, nous voyons sur le tableau que le 4 correspond aux cm donc 23,54 m = 2354 cm.

III : Formules de périmètres

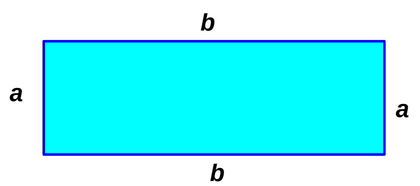
➔Pour calculer des longueurs ou des périmètres il faut exprimer ces longueurs avec la même unité.

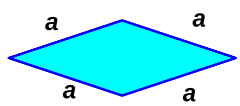
1.) Périmètre du rectangle, du losange, du carré

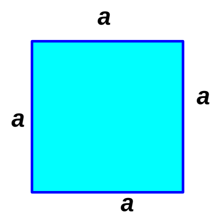
$p = a + b + a + b = 2 \times (a + b)$ $\qquad$ $p = a + a + a + a = 4 \times a$

Le périmètre du rectangle est donc égal au double de la somme de la longueur et de la largeur

Le périmètre du carré et du losange est égal au produit de la longueur du côté par 4.







2.) Longueur du cercle

Nous avons vu qu'un ***cercle*** est un ensemble de point situés à une distance donnée d'un point donné.

Donc un cercle est une ligne et nous parlerons de la longueur d'un cercle, mais aussi du périmètre du disque.

La longueur d'un cercle est :

$l = \pi \times d = 2 \times \pi \times r$ ou d est la longueur du diamètre et r la longueur du rayon.

3.) Le nombre π

C'est Archimède (né en 287 av. JC à Syracuse et mort en 212 av. JC) , en 250 av.JC qui a réellement commencé à calculer des décimales du nombre pi. Il est surtout le premier à avoir utilisé un algorithme pour le calcul.
La méthode, qu'on appelle naturellement aujourd'hui la méthode d'Archimède, consiste à calculer le périmètre de polygones réguliers inscrits et circonscrits au cercle pour encadrer le périmètre du cercle et donc en déduire un encadrement de pi. Il obtint ainsi

$$3+10/71 < \pi < 3+1/7$$

Beaucoup plus tard vint le développement des techniques de calculs avec l'analyse (dérivée, intégrales, sommes de séries, produits infinis ...), Wallis en 1655, Newton (16 décimales en 1665), Gregory, Leibniz, Machin (100 décimales en 1706), puis Euler (20 décimales calculées en une heure !)vers 1760 et beaucoup d'autres.
Les champions contemporains sont les frères *Chudnovsky* avec 4 milliards de décimales en 1994 et *Kanada et Tamura* dont le dernier record datait de 1999 avec 206 milliards de décimales (en environ 33 heures de calculs).
***Kanada* a battu son propre record le 6 décembre 2002 avec une équipe de neuf autres chercheurs japonais du Information Technology Centre de l'Université de Tokyo : 1 241 100 000 000 décimales ont été calculées à l'aide d'un super calculateur Hitachi (400 heures de calculs !) en utilisant un algorithme que l'équipe a mis cinq ans à mettre au point.**

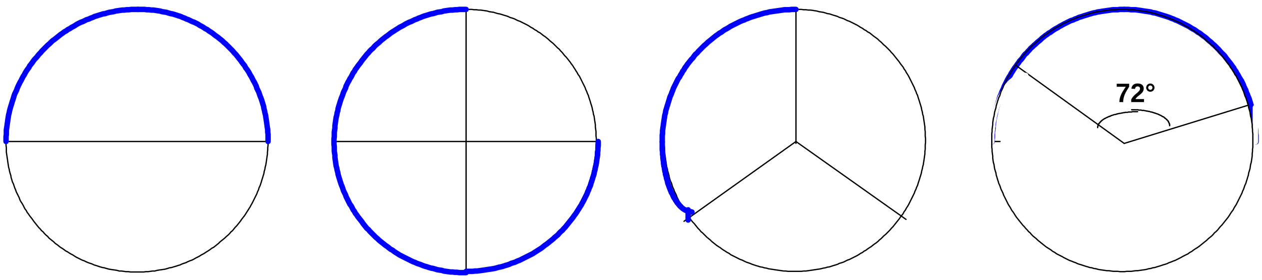
Le nombre π est voisin de 3,14. On écrit: $\pi \approx 3{,}14$

Pour le nombre π on prendra en général, si on n'a pas de calculatrice, 3,14 ou $\frac{22}{7}$

4.) Longueur d'une portion de cercle

Pour avoir la longueur d'une portion de cercle, il faut savoir en combien de parties, le cercle est partagé, pour partager la longueur en autant de parties.

En effet il y a proportionnalité entre la longueur du cercle et l'angle au centre qui encadre l'arc de cercle.



Pour $\frac{1}{2}$ cercle
On a $\ell=\frac{2\times\pi\times r}{2}=\pi\times r$

Pour $\frac{3}{4}$ de cercle
On a $\ell=\frac{2\times\pi\times r\times 3}{4}=\frac{\pi\times r\times 3}{2}$

Pour $\frac{1}{3}$ de cercle
On a $\ell=\frac{2\times\pi\times r}{3}$

Pour un arc avec un angle de 72°
On a $\ell=\frac{2\times\pi\times r\times 72}{360}$

IV : Définition de l'aire d'une figure.

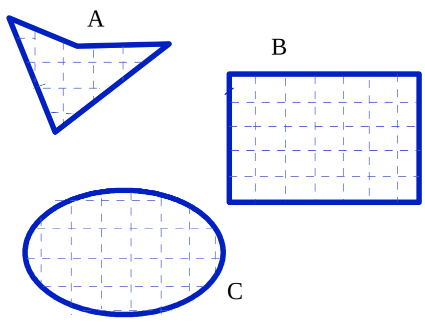
L'**aire d'une figure** est le nombre de petits carreaux de une unité de côté que l'on peut mettre à l'intérieur de la figure.

➔***Exemples:***

Pour les figures A, B, C

La surface est la partie de la feuille située à l'intérieur du trait bleu.

L'aire est le nombre de petits carrés situés à l'intérieur du trait bleu, en supposant que le côté du petit carré soit égal à l'unité choisie.



V : Unités d'Aires

L'unité de base, pour le système métrique, est le **mètre carré**, qui est l'aire d'un carré de 1 mètre de côté. Ici aussi il y a des sous unités et des sur unités. Le symbole du mètre carré est m².

➔***Remarque :***

➢***Dans 1 mètre il y a, par exemple, 10 décimètres. Par contre, dans un mètre carré il y a 100 dm².***

Faire une conversion, c'est transformer un résultat, donné dans une unité, en le même résultat, donné dans une autre unité.

➔***Remarque:***

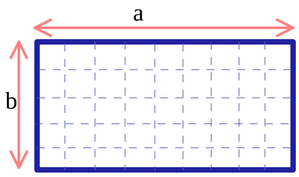
➢***Etant donné la remarque précédente, suivant qu'il s'agit d'une longueur ou d'une aire la conversion ne se fait pas de la même***

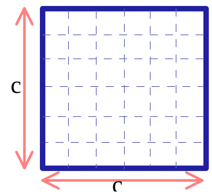
manière. Pour les longueurs il faut des décalages de un chiffre, alors que pour les aires, les décalages sont de 2 chiffres.

Exemples: **2,3cm=23mm mais 2,3cm²=230mm²**
35m=350dm mais 35m²=3500dm²

VI : Aires Particulières

Nous voyons que, dans le rectangle le nombre de petits carrés ayant l'unité comme côté, est égal à a×b





Donc l'aire du rectangle est: $\boxed{a \times b}$

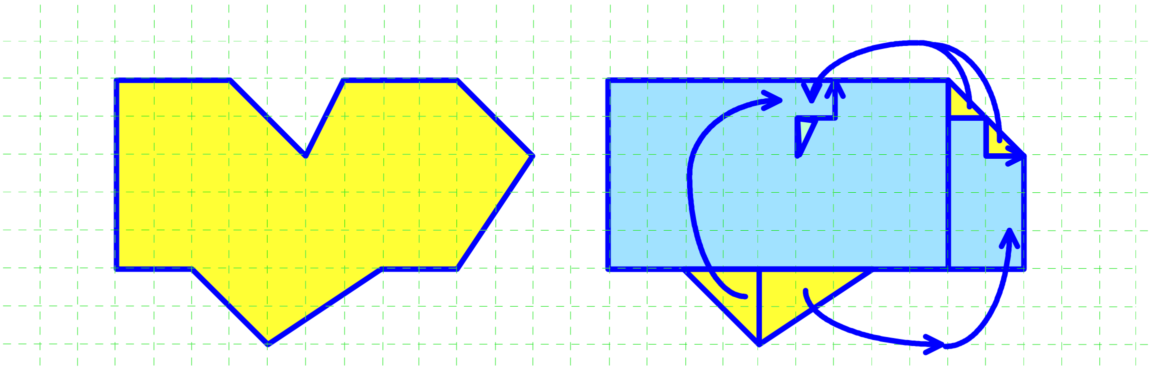
Pour le carré le nombre de petits carrés est: c×c

Donc l'aire du carré est : $\boxed{c \times c = c^2}$

Le triangle rectangle est en fait la moitié d'un rectangle donc son aire est égale à la moitié de celle du rectangle : $\boxed{\frac{a \times b}{2}}$

VII : Décomposition Recollement

Certaines surfaces apparemment complexes ont une aire facile à calculer.
Il suffit de déplacer certaines parties, qui dépassent, dans les creux qui leur correspondraient



La surface est donc formée d'un rectangle de 2,5 cm sur 4,5 cm et d'une surface de 1,75 cm²
L'aire est donc 11,25+1,75=13 cm²